

1697

دعای پیش از مطالعه

اَللهُمَ اَخرِجنی مِن ظُلُماتِ الوَهمِ وَاَکرِمنی بِنُورِ الفَهمِ
اَللهُمَ افتِح عَلَینا اَبوابَ رَحمتَکَ وَ انشُر عَلَینا خَزائِنِ عُلُومِکَ
بِرَحمَتِکَ یا اَرحَمَ الرّاحِمینَ

پروردگارا، خارج کن مرا از تاریکی‌های فکر و گرامی بدار به نور فهم
پروردگارا، بگشای بر ما درهای رحمتت را و بگستران گنج‌های دانشت را به امید رحمت
تو ای مهربان‌ترین مهربانان

بیایید به حقوق دیگران احترام بگذاریم

دوست عزیز، این کتاب حاصل دسترنج چندین ساله‌ی مؤلف، مترجم و ناشر آن است. تکثیر و فروش آن به هر شکلی بدون اجازه از پدیدآورنده کاری غیراخلاقی، غیرقانونی، غیرشرعی و کسب درآمد از دسترنج دیگران است، نتیجه‌ی این عمل نادرست، موجب رواج بی‌اعتمادی در جامعه و بروز پی‌آمدهای ناگوار در زندگی و محیط ناسالم برای خود و فرزندانمان می‌گردد.

آناهید گستر خلیلی

AGK

Anahid Gostar Khalili

نکات داغ ریاضی

ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی اقتصاد بهداشت

تألیف و گردآوری:

امین علیزاده

«*رتبه* 14 *کارشناسی ارشد اقتصاد بهداشت دانشگاه علوم پزشکی ایران*»

سرشناسه	: علیزاده، امین، 1368-
عنوان و نام پدیدآور	: AGK نکات داغ آمار ریاضی ویژه کارشناسی ارشد رشته‌ی اقتصاد بهداشت/ تألیف و گردآوری امین علیزاده.
مشخصات نشر	: تهران: آناهید گستر خلیلی، 1404.
مشخصات ظاهری	: 103ص.؛ 14/5×5/21 س‌م.
شابک	: 978-622-4744-59-3
وضعیت فهرست‌نویسی	: فیپا
موضوع	: ریاضیات -- راهنمای آموزشی -- مسائل، تمرین‌ها و غیره (عالی) Mahtematics -- Study and teaching-- Problems, exercises, etc (Higher)
رده‌بندی کنگره	: QA37/2
رده‌بندی دیویی	: 510/76
شماره کتابشناسی ملی	: 9999691

انتشارات آناهید گستر خلیلی

نام: AGK نکات داغ ریاضی

تألیف و گردآوری: امین علیزاده

ناشر: آناهید گستر خلیلی

نوبت و سال چاپ: اول . 1404

شمارگان: 1000

چاپ و صحافی: گیلان

مدیر تولید: امیرحسین خلیلی

مدیر فنی و هنری: مریم آرده

تایپ و صفحه‌آرایی: آرزو راضی

بهاء: 120000 تومان

آموزشگاه/ فروشگاه: 02166568621

مرکز پخش: ضلع جنوب‌غربی میدان انقلاب . جنب بانک پارسیان . مجتمع تجاری پارس . طبقه اول

مدیر فروش: 09191685970 (ارتباط از طریق پیامک)

agkpublisher@gmail.com **www.agkins.com**

طلیعه سخن مدیر تولید:

سپردن کار به اهلش نشانه‌ی خردمندی است.

برای تولید بسته‌های آموزشی تمام تلاش خود را به کار گرفته‌ایم تا محصولی شایسته را تقدیم شما عزیزان نماییم. مجموعه‌ای که پیش روی شماست براساس معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور می‌باشد و به قلم مجرب‌ترین اساتید تألیف شده است و مطالعه آن موجب صرفه‌جویی در زمان و هزینه شما خواهد شد.

ارائه بالاترین آمار قبولی در کنکور کارشناسی ارشد و دکتری در دهه اخیر بیان‌گر توانایی این گروه در راستا اهداف خود می‌باشد. اینک با اتکا به تجربه‌ای 17 ساله می‌توانیم ادعا کنیم که مجموعه حاضر، بی‌شک از جمله‌ی کامل‌ترین و تضمینی‌ترین بسته‌های آموزشی در عرصه کنکور می‌باشد.

برخی از ویژگی‌های بسته‌های آموزشی:

- منطبق با معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور
- گردآوری و تألیف توسط مجرب‌ترین اساتید کنکور
- تدریس مطالب از سطح پایه تا پیشرفته به بیان ساده و روان
- انتقال بهتر مفاهیم با استفاده از شکل، جدول و نمودار
- تألیف مبتنی بر نحوه‌ی طراحی سوالات کنکور
- مطالعه یک منبع منسجم به‌جای مطالعه چندین منبع مختلف
- منبعی خودآموز و بدون نیاز به مدرس

اینک علاوه بر مطالعه بسته‌های آموزشی استفاده از خدمات زیر را به عنوان ضمانتی برای قبولی به شما داوطلبان عزیز توصیه می‌کنم؛

- نکات داغ (Hot Points)

این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است؛ دیگر نیازی به خلاصه‌نویسی برای دوران مرور و جمع‌بندی نخواهید داشت ...

اکثر داوطلبان پس از مطالعه‌ی منابع برای خلاصه‌نویسی دچار سردرگمی می‌شوند یا به خلاصه‌های خود اطمینان ندارند، حتی گاهی حجم خلاصه‌ها بیش از حجم منبع می‌شود!!! گاهی هم به اشتباه تصور می‌کنند که نکات و خلاصه‌هایشان در چارچوب کنکور است یا نکاتی را که گلچین کرده‌اند مهم‌اند.

توجه کنیم که خلاصه‌نویسی مطالب برای کنکور دارای اصول و قاعده است که اغلب داوطلبان پس از مطالعه قادر به انجام صحیح آن نیستند. به همین منظور تمام تلاش خود را به‌کار گرفته‌ایم که استانداردترین منبع نکات را در چارچوب کنکور تقدیم شما نماییم.

هدف از تولید نکات داغ فراهم کردن یک منبع برای دوران مرور و جمع‌بندی است.

- ویژگی‌های نکات داغ:

برگرفته از معتبرترین و به‌روزترین منابع کنکور

مجموعه‌ای از نکات کنکوری به صورت طبقه‌بندی موضوعی

پوشش قابل ملاحظه سوالات کنکور در کم‌ترین حجم ممکن

مناسب‌ترین منبع برای دوران مرور و جمع‌بندی

- آزمون‌های آزمایشی: خوش بود گر محک تجربه آید به میان

داوطلب شجاع کیست؟ داوطلبی است که خود را مورد سنجش و ارزیابی قرار دهد تا پیش از آزمون سراسری به نقاط ضعف خود پی برده و آن‌ها را تقویت نماید. صادقانه به شما توصیه می‌کنیم که در آزمون‌های آزمایشی شرکت کنید تا بتوانید خود را با خود (سنجش) و با دیگران (ارزیابی) مقایسه و نقاط ضعف و قوت خود را شناسایی نمایید.

- مشاوره و برنامه‌ریزی: برای موفقیت هوش کافی نیست، جسارت لازم دارد.

در صورتی که نمی‌توانید با توجه به زمان آزادتان برنامه‌ی مطالعاتی استاندارد برای خود تدوین کنید حتماً از افراد با تجربه که خود در این مسیر موفق بوده‌اند کمک بخواهید. افرادی که تجربیات خود را صادقانه در اختیار شما قرار می‌دهند و برنامه‌ریزی مناسب با شرایط زمانی و ویژگی‌های روحی و جسمی مختص شما انجام می‌دهند.

- کتاب تست:

کوچک‌ترین واحد یادگیری در کنکور، تست است.

شما می‌توانید برای این‌که سطح یادگیری خود را پس از مطالعه بسنجید از کتاب‌های تست مجموعه (تست کنکور) و ماطراحان (تست‌های تألیفی) استفاده کنید. این کتاب‌ها به‌صورت موضوعی طبقه‌بندی شده‌اند و می‌توانند نحوه‌ی طرح سوالات کنکور و سطح آن‌ها را به‌صورت واضح به شما نشان دهند.

- درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم مناسب‌ترین منابع برای دوران مرور و جمع‌بندی:

بیش‌تر داوطلبان حین مطالعه نگران خلاصه‌نویسی و مرور آموخته‌های خود هستند و برای خلاصه‌نویسی زمان زیادی را صرف می‌کنند. اینک به شما مژده می‌دهیم که این‌بار زمان به نفع شما در حال گذر است و دیگر با استفاده از درسنامه‌های نکات داغ و کتاب‌های الگوریتم نیاز به خلاصه‌نویسی ندارید.

شما می‌توانید پیشنهاد و یا انتقاد سازنده خود را به شماره تلفن همراه 09191685970 فقط و فقط پیامک نمایید.

مشاور و مدیر تولید

امیرحسین خلیلی

طلیعه سخن مؤلف:

بدون شک در تمام رشته‌هایی که از درس ریاضی سوال آورده می‌شود باید گفت که این درس حتی اگر ضریب آن پایین باشد هم در کسب رتبه خوب بسیار تعیین‌کننده است. از این‌رو در این کتاب کمک‌آموزشی بنده سعی کردم تا در یک غالب خلاصه و پیوسته نکات را به‌صورتی کاملاً متفاوت برای شما دانشجویان گرامی طبقه‌بندی کنم. به‌طوری که هم به افزایش سرعت مطالعه شما و هم به یادگیری بهتر و سریع‌تر و به دور از هر گونه گزافه‌گویی شما کمک کرده باشم.

اما اگر می‌خواهید این کتاب کمک‌آموزشی تأثیر بیش‌تری در یادگیری شما داشته باشد، توصیه اکید بنده به شما روش مطالعه زیر است:

1- ابتدا نکات داغ هر فصل را مطالعه کنید.

2- از هر فصل تست بزنید (به زودی کتاب تست ریاضی عمومی ویژه آزمون‌های کارشناسی ارشد وزارت بهداشت را چاپ خواهیم کرد).

3- تست‌ها را در دفعات زمانی متفاوتی دوباره پاسخ دهید.

4- همواره هر جایی که نکات را فراموش کرده بودید برگردید و بازبینی کنید. فراموش نکنید در درس ریاضی و آمار، تکرار و تمرین خیلی مهم است.

در پایان جا دارد از همکاران گرامی جناب آقای امیرحسین خلیلی و سرکار خانم مریم آرده که با زحمات شبانه‌روزی خود در انتشارات آناهید گستر خلیلی، اینجانب را در تألیف این کتاب کمک‌آموزشی صبورانه یاری رساندند، کمال تقدیر و تشکر صمیمانه را داشته باشم و برای ایشان در تمام مراحل زندگی آرزوی بهترین‌ها را دارم.

با تشکر

امین علیزاده

فهرست مطالب

فصل و عنوان **صفحه**

فصل اول: مجموعه‌ها 9

فصل دوم: بسط دو جمله‌ای 12

فصل سوم: مختصات قطبی، اعداد مختلط 14

فصل چهارم: تابع 18

فصل پنجم: حد و پیوستگی 34

فصل ششم: مشتق 45

فصل هفتم: انتگرال 57

فصل هشتم: بردار، خط و صفحه 68

فصل نهم: ماتریس و دترمینان 77

فصل دهم: توابع چندمتغیره 88

فصل یازدهم: دنباله و سری 97

فصل دوازدهم: معادلات دیفرانسیل 101

فصل

1

مجموعه‌ها

مجموعه

- به دسته‌ای از اشیاء دو به دو متمایز و کاملاً مشخص گفته می‌شود.
- نمایش تفصیلی: $\{1,2,3,...,19\}$
- نمایش ریاضی: $\{x \mid x \in N, x < 20\}$
- اعداد حقیقی R
- اعداد اَصَم Q^C
- اعداد صحیح Z
- اعداد حسابی W
- اعداد طبیعی N
- یک مجموعه‌ی n عضوی 2^n زیرمجموعه دارد و اگر بخواهیم تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی آن را به‌دست آوریم، داریم:

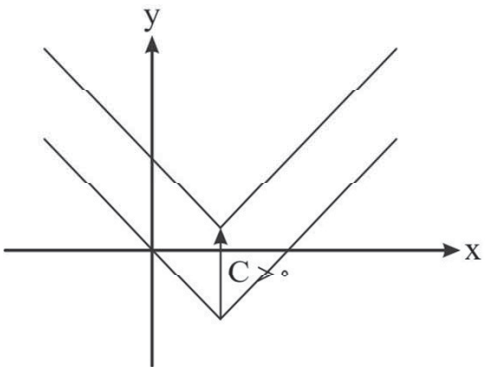
$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- و اگر K عضو، به یک مجموعه اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن 2^K برابر می‌شود.

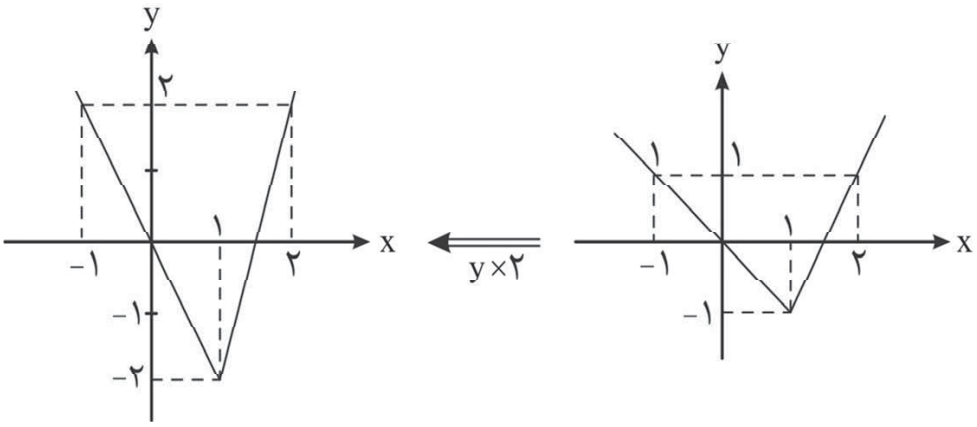
$(a \in A)$ عضو

$(a \subset A)$ زیرمجموعه

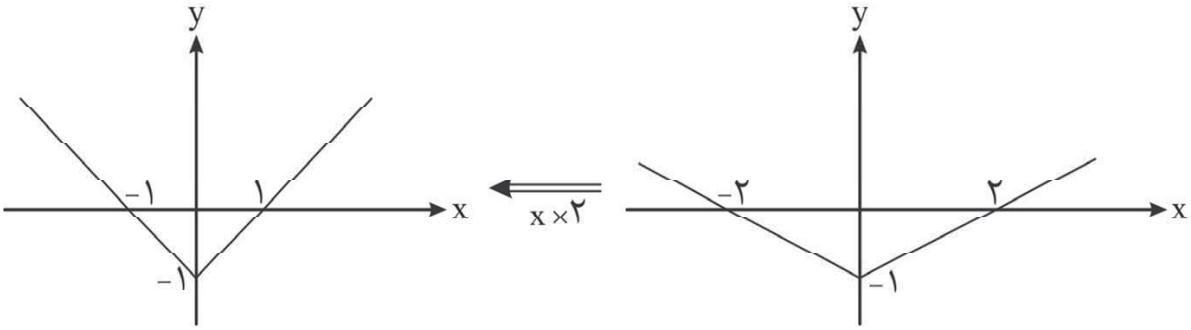
- $y = f(x) + C$: تابع به اندازه‌ی C در راستای محور yها جابه‌جا می‌شود.



- $y = Cf(x)$: با حفظ طول (x) هر نقطه عرضش (y) را در C ضرب می‌کنیم:



- $y = f(Cx)$: با حفظ عرض (y) هر نقطه طولش (x) را بر C تقسیم می‌کنیم:



- تابع ثابت:
  - تابعی به‌صورت $y = C$ را ثابت گویند که برد آن یک عضوی است و به ازای هر مقدار از دامنه برد برابر عدد ثابت C می‌شود و نمودارش خط افقی است.
- تابع همانی:
  - تابعی به‌صورت $f(x) = y = x$ را همانی گویند که نمودارش نیم‌ساز ربع اول و سوم است.

فصل

5

حد و پیوستگی

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c}(f(x) - L) = 0$$

- تابع $f(x)$ وقتی $x \to c$ حد دارد اگر و تنها اگر حد چپ و حد راست $f(x)$ در c موجود و باهم برابر باشد یعنی:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = L$$

- روش‌های محاسبه‌ی حدود:

1. هرگاه $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

2. در تابع کسری $\frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $g(c) \neq 0$ باشد:

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

3. در توابع رادیکالی در صورتی که عبارت زیر رادیکال به یکی از دو شکل بالا باشند داریم:

الف- اگر فرجه فرد باشد:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(c)}$$

ب- اگر فرجه زوج باشد و $f(c) > 0$ باشد:

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(c)}$$

4. حد توابع مثلثاتی ساده هم این‌گونه است:

$$\lim_{x\to c} \cos x = \cos c$$

$$\lim_{x\to c} \sin x = \sin c$$

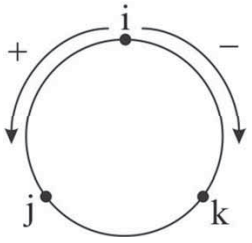
$$\lim_{x\to c\neq k\pi} \cot x = \cot c$$

$$\lim_{x\to c\neq k\pi+\frac{\pi}{2}} \tan x = \tan c$$

- ضرب خارجی دو بردار:
  - اگر $a=(a_1,a_2,a_3)$ و $b=(b_1,b_2,b_3)$ باشد، ضرب خارجی a در b به‌صورت زیر تعریف می‌شود که نتیجه‌ی آن یک بردار است که بر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عمود است و طول آن برابر است با: $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

$$a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \leftarrow \text{دترمینان}$$

- ضرب خارجی بردارهای یکه:



  - $i\times j=k$
  - $j\times k=i$
  - $k\times i=j$
  - $j\times i=-k$
  - $k\times j=-i$
  - $i\times k=-j$
  - $i\times i=0$
  - $j\times j=0$
  - $k\times k=0$
- ویژگی‌های ضرب خارجی:
  - $a\times b=-b\times a$
  - $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$
  - $r(a\times b)=(ra)\times b=a\times(rb)$
  - $a\times a=0$
  - $a\times O=O\times a=O$
  - $a.(a\times b)=0$ ($a\times b$ بر a عمود است)
  - $b.(a\times b)=0\Rightarrow (a\times b)\perp b$
- ضرب مختلط:
  - $a.(b\times c)$ را ضرب مختلط a، b و c می‌نامیم و داریم:

$$a.(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

  - و داریم:

$$a.(b\times c)=b.(c\times a)=c.(a\times b)$$

و چنان‌چه x و y تابعی از t و r باشند یعنی $x = g(t,r)$ و $y = h(t,r)$ در این صورت به جای dx و dy داریم:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t}dt + \frac{\partial x}{\partial r}dr \qquad dy = \frac{\partial y}{\partial t}dt + \frac{\partial y}{\partial r}dr$$

دیفرانسیل مراتب بالاتر:

اگر $z = f(x,y)$ باشد می‌دانیم $dZ = Z_x dx + Z_y dy$ است. در این صورت دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم Z را با d^2Z نشان می‌دهیم و داریم:

$$d^2Z = Z_{xx}dx^2 + 2Z_{xy}dx\,dy + Z_{yy}dy^2$$

- رابطه‌ی فوق را می‌توان به‌صورت «ماتریس هشین» نیز نوشت:

$$\left[d^2Z\right] = \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

برای نوشتن دیفرانسیل مرتبه‌ی n اُم داریم: $d^nZ = (Z_x dx + Z_y dy)^n$

که توان n برای Z_x و Z_y به معنی مشتقات جزئی مراتب بالاتر و برای dx و dy همان توان جبری است.

مثلاً اگر بخواهیم دیفرانسیل مرتبه‌ی سوم را به‌صورت ماتریس هشین نشان دهیم داریم:

$$\left[d^3Z\right] = \begin{bmatrix} dx & dy & dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{xt} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{yt} \\ Z_{tx} & Z_{ty} & Z_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dt \end{bmatrix}$$

مشتق کامل:

اگر $Z = f(x,y)$ باشد:

- الف- اگر x و y تابعی از t باشند، مشتق کامل Z نسبت به t برابر است با:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

- ب- اگر x و y توابعی از t و r باشند در این صورت داریم:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} \qquad \frac{\partial Z}{\partial r} = \frac{\partial Z}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial Z}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial r}$$

برای یافتن مشتق کامل می‌توانیم ابتدا عبارات مربوط به x و y را در تابع مورد نظر جای‌گذاری کنیم و سپس از آن نسبت به t یا r مشتق بگیریم. برای یافتن مشتقات کامل مراتب بالاتر بهتر است از این روش استفاده کنیم.

- مشتق تابع ضمنی:
  - می‌دانیم تابع ضمنی تابعی است که در آن نتوانیم متغیرها را از هم جدا کنیم. در این صورت اگر تابع ضمنی $F(x,y,z)=0$ را داشته باشیم و بدانیم در آن z تابعی از x و y است، مشتقات ضمنی تابع F به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

- تابع همگن:
  - تابع $Z=f(x,y)$ را همگن از درجه‌ی n گویند هرگاه:

$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{n} f(x,y)$$

- قضیه‌ی اویلر:
  - اگر $Z=f(x,y)$ تابعی همگن از درجه‌ی n باشد آن‌گاه داریم:

$$x.\frac{\partial Z}{\partial x}+y.\frac{\partial Z}{\partial y}=nZ$$

  - هم‌چنین داریم:

$$x.\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+y.\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}=(n-1)\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$y.\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}+x.\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}=(n-1)\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$x^2.\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}+2xy.\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y}+y^2.\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}=n(n-1)Z$$

- ژاکوبین:
  - اگر $\begin{cases}u=f(x,y)\\ v=g(x,y)\end{cases}$ باشد در این صورت ژاکوبین به‌صورت $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ تعریف $\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}$ می‌شود. ژاکوبین فوق را به‌صورت $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ نیز نشان می‌دهند.
  - دستگاه $\begin{cases}f(x,y,u,v)=0\\ g(x,y,u,v)=0\end{cases}$ را در نظر بگیرید که در آن u و v توابعی از x و y هستند. در این صورت برای به‌دست آوردن u_x، u_y، v_x و v_y کافی است از دو معادله‌ی فوق

نسبت به x یا y مشتق بگیریم و به حل دستگاه حاصل بپردازیم. یعنی:

$$\begin{cases} f_x + f_u.u_x + f_v.v_x = 0 \\ g_x + g_u.u_x + g_v.v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_u.u_x + f_v.v_x = -f_x \\ g_u.u_x + g_v.v_x = -g_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x,y,u,v) = 0 \\ g(x,y,u,v) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ① \nearrow \\ ② \searrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} f_y + f_u.u_y + f_v.v_y = 0 \\ g_y + g_u.u_y + g_v.v_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_u.u_y + f_v.v_y = -f_y \\ g_u.u_y + g_v.v_y = -g_y \end{cases}$$

- ① یعنی برای به‌دست آوردن u_x و v_x به حل دستگاهی می‌پردازیم که در اثر مشتق گرفتن از f و g نسبت به x به‌دست آمده است.
- ② یعنی برای محاسبه‌ی u_y و v_y به حل دستگاهی می‌پردازیم که از مشتق گرفتن از f و g نسبت به y به‌دست آمده است.

اگر به روش کرامر به حل این دستگاه‌ها بپردازیم به چند ژاکوبین برمی‌خوریم ولی ما دستگاه‌های فوق را به روش معمولی (حذفی) حل می‌کنیم.

یافتن ماکزیمم، مینیمم و نقطه‌ی زینی (یافتن نقاط بحرانی):

برای یافتن نقاط اکسترمم و زینی توابعی به شکل $Z = f(x_1, ..., x_n)$ روش‌های مختلفی وجود دارد. فرض کنید $Z = f(x,y,t)$ باشد در این صورت ابتدا باید نقاط بحرانی را مشخص کنیم. برای این کار مشتقات جزئی Z را برابر صفر قرار می‌دهیم و دستگاه حاصل را حل می‌کنیم (لازم به ذکر است این دستگاه را معمولاً با دیدن هم می‌شود حل کرد و از روش‌های حل دستگاه استفاده نمی‌کنیم):

$$\begin{cases} Z_x = 0 \\ Z_y = 0 \\ Z_t = 0 \end{cases}$$

بعد از یافتن نقاط بحرانی به ازای هر یک از آن‌ها دترمینان‌های زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$H = \begin{bmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{xt} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{yt} \\ Z_{tx} & Z_{ty} & Z_{tt} \end{bmatrix}$$

- $\left|H_1\right| = Z_{xx}$

$$\left|H_2\right| = \begin{vmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\left|H_3\right| = \begin{vmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} & Z_{xt} \\ Z_{yx} & Z_{yy} & Z_{yt} \\ Z_{tx} & Z_{ty} & Z_{tt} \end{vmatrix}$$

- حال هر نقطه‌ی بحرانی را ماکزیمم گوییم هرگاه به ازای آن:

$$\left|H_1\right| < 0, \left|H_2\right| \overset{+}{>} 0, \left|H_3\right| < 0, \ldots$$

- و آن را مینیمم گوییم هرگاه به ازای آن:

$$\left|H_1\right| > 0, \left|H_2\right| \overset{+}{>} 0, \left|H_3\right| > 0, \ldots$$

- در غیر این صورت نقطه‌ی بحرانی مورد نظر را نقطه‌ی زینی گوییم.

اگر $Z = f(x,y)$ باشد راحت‌تر آن است که عبارت $\Delta M = Z_{xx} Z_{yy} - Z_{xy}^2$ را تشکیل دهیم و آن‌گاه:

- $\text{If} : \Delta M \overset{+}{>} 0, Z_{xx} < 0 \Rightarrow \max$
- $\text{If} : \Delta M \overset{+}{>} 0, Z_{xx} > 0 \Rightarrow \min$
- $\text{If} : \Delta M < 0 \Rightarrow$ زینی
- البته این روش فقط در حالت دو متغیره پاسخگو است ضمناً اگر $\Delta M = 0$ باشد نمی‌توان از این روش استفاده کرد.

محدب و مقعر بودن:

- می‌دانیم تابعی که max دارد مقعر است و تابعی که min دارد محدب می‌باشد بنابراین داریم:

$\text{If} : \left|H_1\right| < 0, \left|H_2\right| \overset{+}{>} 0, \left|H_3\right| < 0, \ldots \Rightarrow$ min و تابع محدب است

$\text{If} : \left|H_1\right| > 0, \left|H_2\right| \overset{+}{>} 0, \left|H_3\right| > 0, \ldots \Rightarrow$ max و تابع مقعر است

تعریف نقاط بحرانی، max، min و زینی در توابع چندمتغیره:

- نقطه‌ی بحرانی: یک نقطه‌ی درونی از دامنه‌ی تابع $f(x,y)$ که در آن‌ها $f_x = f_y = 0$ باشد یا در آن‌ها f_x یا f_y یا هر دوی آن‌ها موجود نباشد (یعنی به ترتیب نقاط اکسترمم (و زینی) و نقاط مرزی).
- ماکزیمم مطلق: $f(a,b)$ را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌نامیم هرگاه برای هر (x,y) (که $x \in D_f$) داشته باشیم: $f(x,y) \le f(a,b)$

فصل

11

دنباله و سری

- دنباله:
  - به تابع $u_n = f(n)$ یا $\{u_n\}$ یک دنباله می‌گوییم که n دامنه‌ی آن است و $n \in \mathbb{N}$ می‌باشد. به عبارت دیگر دنباله مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هایی به‌صورت $(n, f(n))$ است. به $u_n = f(n)$ جمله‌ی عمومی دنباله گویند.
- حد دنباله:
  - اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to-\infty} f(n) = L$ باشد می‌گوییم، حد دنباله برابر L است. در این صورت می‌گوییم دنباله‌ی مورد نظر به سمت L همگرا است. اگر دنباله‌ای حد نداشته باشد واگرا است.
- یکنوایی دنباله:
  - اگر $\{u_n\}$ صعودی یا نزولی باشد می‌گوییم یکنوا است. ضمناً $\{u_n\}$ صعودی است هرگاه هر $u_n \le u_{n+1}$ باشد و $\{u_n\}$ نزولی است هرگاه هر $u_n \ge u_{n+1}$ باشد. هم‌چنین اگر $u'_n > 0$ باشد دنباله صعودی است و اگر $u'_n < 0$ باشد دنباله نزولی است.
- کران دنباله:
  - به عدد c کران بالای دنباله‌ی $\{u_n\}$ گوییم هرگاه c از هر u_n بزرگ‌تر باشد و c را کران پایین گوییم هرگاه c کوچک‌تر از هر u_n باشد. اگر دنباله‌ای هم کران بالا و هم کران پایین داشته باشد می‌گوییم کران‌دار است. ضمناً هر دنباله می‌تواند دارای بی‌نهایت کران بالا و پایین داشته باشد (اعداد بزرگ‌تر یا کوچک‌تر از c).

- اگر دنباله‌ای کران‌دار و یکنوا باشد حتماً همگرا است و اگر دنباله‌ای همگرا و یکنوا باشد حتماً کران‌دار است.
- اگر $\{u_n\}$ صعودی و c یک کران بالای آن باشد آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \le c$ و اگر $\{u_n\}$ نزولی و c یک کران پایین u_n باشد آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \ge c$.

- سری:
  - اگر $\{u_n\}$ یک دنباله باشد و $u_1+u_2+...+u_n+...$ $S_n=\sum_{i=1}^{n}u_i$ باشد، آن‌گاه به دنباله‌ی $\{S_n\}$ یک سری یا یک سری نامحدود گویند (یعنی $S_1,S_2,...,S_n$). در این صورت بر هر یک از S_iها «مجموع جزئی» گویند.
- حد سری:
  - برای به‌دست آوردن حد سری باید چند مجموع جزئی (جمله‌ی) آن را مثلاً S_1 و S_2 و S_3 و S_4 را تشکیل دهیم و به کمک آن‌ها به یک قاعده برای S_n (جمله‌ی عمومی برای S_n) برسیم آن‌گاه اگر $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ باشد، S را حد سری گوییم و سری را همگرا به سمت S می‌نامیم. در غیر این صورت سری واگرا است.
- گاهی برای به‌دست آوردن جمله‌ی عمومی سری می‌توان از قاعده‌ی تلسکوپی در سیگما استفاده کرد که می‌گوید:

$$\sum_{k=1}^{n}\big(f(k)-f(k+1)\big)=f(1)-f(n+1) \Rightarrow \text{مثلاً}: \sum_{k=3}^{n}\Big(\underbrace{\frac{1}{k-1}}_{f(k)}-\underbrace{\frac{1}{k}}_{f(k+1)}\Big)=\frac{1}{3-1}-\frac{1}{n}$$

- سری هارمونیک:
  - به سری $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$ سری هارمونیک یا همسازه گویند که واگرا است.
- سری هندسی:
  - به سری $\sum_{n=1}^{+\infty}ar^{n-1}=a+ar+ar^2+...+ar^{n-1}+...$ سری هندسی گویند که در آن $r=\frac{u_n}{u_{n-1}}$ قدر نسبت نامیده می‌شود و اگر $|r|<1$ باشد، سری همگرا به $\frac{a}{1-r}$ است و اگر $|r|>1$ باشد سری واگرا است.
- برای تشخیص همگرایی یا واگرایی چند آزمون خاص وجود دارد:
  - آزمون جمله‌ی n اُم: در سری $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ اگر $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \neq 0$ یا وجود نداشته باشد، سری واگرا است. در غیر این صورت نمی‌توان نظر داد و این آزمون کافی نیست.

- آزمون چندجمله‌ای: در سری $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P(n)}{Q(n)}$ اگر درجه‌ی صورت p و درجه‌ی مخرج q باشد آن‌گاه اگر $q > p+1$ باشد سری همگرا است و اگر $q \leq p+1$ باشد سری واگرا است.
- آزمون مقایسه‌ی حد: اگر $\sum u_n$ و $\sum v_n$ دو سری مثبت باشند و $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = L$ باشد آن‌گاه اگر $L > 0$ باشد، هر دو سری یا همگرایند یا واگرا. اگر $L = 0$ باشد و $\sum v_n$ همگرا باشد، $\sum u_n$ هم همگرا است و اگر $L = +\infty$ باشد $\sum v_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\sum u_n$ واگرا است (اگر همگرایی یک سری را نتوانیم با روش‌های دیگر مشخص کنیم می‌توانیم آن سری را به کمک سری هارمونیک در این روش قرار دهیم و همگرایی‌اش را مشخص کنیم).
- آزمون P: در سری $\sum(\frac{1}{n})^P$ اگر $P > 1$ باشد سری همگرا است و اگر $P \leq 1$ باشد سری واگرا است.

- آزمون دالامبر: در سری $\sum u_n$ اگر $\lim\frac{u_{n+1}}{u_n} = L$ باشد، چنان‌چه $L > 1$ باشد سری واگرا است، $L < 1$ باشد سری همگرا است و اگر $L = 1$ باشد نتیجه‌ای نمی‌توان گرفت (این آزمون برای سری‌های فاکتوریل‌دار خوب است).

سری‌های متناوب:

- سری‌هایی که جملاتش یک در میان مثبت و منفی باشند را گوییم و به یکی از دو صورت $\sum(-1)^{n+1}u_n$ یا $\sum(-1)^n u_n$ می‌باشد. در این سری‌ها، اگر جملات از نظر قدر مطلق ($|u_i|$ها) نزولی می‌باشند و $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ باشد آن‌گاه سری مورد نظر همگرا است و مجموع جملات آن از جمله‌ی اول کوچک‌تر است.
- آزمون نسبیت: شبیه آزمون دالامبر است. اگر در سری $\sum u_n$ همه‌ی u_nها غیرصفر باشند و $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = L$ باشد آن‌گاه اگر $L < 1$ باشد سری مطلقاً همگرا و اگر $L > 1$ باشد سری واگرا است و اگر $L = 1$ باشد نمی‌توان نتیجه‌ای گرفت.

سری توانی:

- اگر جملات یک سری در خود توابعی از x مثلاً $(x = a)$ داشته باشند به آن سری

- معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی اول:
  - به معادله‌ی دیفرانسیلی به‌صورت $y' + yf(x) = g(x)$ گویند. برای حل آن داریم:

$$A = e^{\int f(x)dx}$$

$$Y = \frac{C}{A} + \frac{1}{A}\int A.g(x)\,dx$$

- معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم همگن:
  - به‌صورت $Ay'' + By' + Cy = 0$ (x نداریم) است. برای حل آن معادله‌ی مفسر یا کمکی $AK^2 + BK + C = 0$ را تشکیل می‌دهیم و آن را برای K حل می‌کنیم. در این صورت سه حالت ممکن است رخ دهد.

$$If: \Delta > 0, K_1, K_2 \Rightarrow y = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x}$$

$$If: \Delta = 0, K_1 = K_2 \Rightarrow y = C_1 e^{K_1 x} + C_2 x e^{K_1 x}$$

$$If: \Delta < 0, K = a + bi \Rightarrow y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

- برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی n اُم همگن نیز از همین روش استفاده می‌کنیم.
- معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم ناهمگن:
  - به‌صورت $Ay'' + By' + Cy = f(x)$ است. برای حل آن برای قسمت همگن (سمت چپ تساوی) مثل بالا عمل می‌کنیم و فقط هنگام تشکیل y جواب به‌دست آمده را به‌علاوه‌ی $G(x)$ می‌کنیم. مثلاً در حالت $\Delta > 0$ می‌نویسیم $y = C_1 e^{K_1 x} + C_2 e^{K_2 x} + G(x)$.
  - حال برای به‌دست آوردن $G(x)$، اگر f درجه‌ی یک باشد $G(x) = ax + b$، اگر درجه‌ی دو باشد $G(x) = ax^2 + bx + c$ و اگر f برحسب e^x باشد $G = ae^x$ (یا $G = axe^x$) را تشکیل می‌دهیم و G' و G'' را به‌دست می‌آوریم و G و G' و G'' را به‌ترتیب به جای y و y' و y'' قرار می‌دهیم تا a و b و c معلوم شوند. اگر f مقدار ثابت D باشد $G = \frac{D}{C}$ (C؛ ضریب y) خواهد بود.
  - سپس G را در جواب عمومی جای‌گذاری می‌کنیم.

جامــع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع‌آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به‌صورت فصل‌بندی شده

الگــوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به‌صورت رایگان

FREE
DOWNLOAD

www.agkins.com

جامـــع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع‌آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به‌صورت فصل‌بندی شده

الگـــوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به‌صورت رایگان

FREE
DOWNLOAD

www.agkins.com

جامـــع

حاوی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

بانک سوالات

جمع‌آوری سوالات کنکور کاردانی به کارشناسی
کارشناسی ارشد و دکتری به‌صورت فصل‌بندی شده

الگـــوریتم

چکیده‌ی تمامی مطالب و نکات لازم
برای کنکور براساس منابع

سوالات تألیفی

تألیف سوالات مشابه کنکور



دریافت نمونه‌ی کتاب به‌صورت رایگان

FREE
DOWNLOAD

www.agkins.com

شماره تماس با نمایندگی‌های فعال و رسمی

آناهیـد گستـر خـلیـلی

نمایندگی	شماره تماس	نمایندگی	شماره تماس
اراک (آقای حسینی)	09913713750	شیراز (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	09195730152
اردبیل (خانم عاصمی‌زاده)	09199101248	فسا (خانم شعبانی)	09913713742
ارومیه (آقای آرمیون)	09199101241	قزوین (خانم چگینی)	09195730149
اسفراین (خانم اسماعیل‌زاده)	09196321852	کرج (آقای دکتر علیرضاپور)	09197781947
اصفهان (آقای نصری)	09195730150	کاشان (خانم صادق‌پور)	09913713746
ایلام (آقای دکتر بوچانی)	09190980318	کردستان (آقای ابراهیمی)	09195730148
اهواز (آقای امین‌فر)	09195730154	کرمانشاه (آقای ابراهیمی)	09195730148
بیرجند (آقای دکتر بهروان)	09195907203	کهکیلویه (آقای فروردین/ خانم هوشمندی)	09195730152
تبریز (خانم عاصمی‌زاده)	09195730147	گرگان (آقای شاه‌علی)	09199101247
جهرم (آقای یاعلی جهرمی)	09013737896	مراغه (آقای صمدی)	09195733179
خرم‌آباد (خانم میر)	09192705878	مشهد (خانم دکتر شجاعی)	09913713744
زنجان (خانم دکتر هوشیار)	09192705871	میاندوآب (آقای صمدی)	09195733179
ساری (آقای دکتر اکبری)	09197781944	هرمزگان (آقای زارعی)	09195733284
سمنان (آقای دکتر سلمانی)	09913713741	همدان (آقای سوری)	09195730155
شهرکرد (خانم تقی‌پور)	09199101249	یزد (خانم مهندس آزاد)	09199101243

بانک کتاب ناهید

«هر کتابی، از هر انتشاراتی را از ما بخواهید»



- ✓ جامع‌ترین بانک کتاب
- ✓ تحویل روزانه
- ✓ ارسال به تمامی نقاط کشور
- ✓ سفارش کتاب به‌صورت تلفنی و آنلاین

www.NIBS.ir

کتب دانشگاهی، فنی‌و مهندسی، علوم پزشکی، علوم انسانی، عمومی، ادبی، مذهبی، کمک آموزشی، کودک و نوجوان و کتب نفیس

فروشگاه: تهران – خیابان انقلاب- روبه‌روی درب اصلی دانشگاه تهران

پاساژ فروزنده – طبقه همکف – پلاک ۳۳۱

تلفن: ٦٦٤٨٩٣٧٥ – ۰۲۱ – ٦٦٤٨٩٣٤٩ – ۰۲۱